

Persistente Kohomologie und zyklische Koordinaten

Mikael Vejdemo-Johansson Vin de Silva
Dmitriy Morozov Primoz Skraba

17. November 2010

Koordinatisierung

Wir wollen Koordinatenfunktionen für einer Datenmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ finden. Ziel: Beschreibung der Form der Datenmenge mit weniger als d Funktionen.

Klassisch

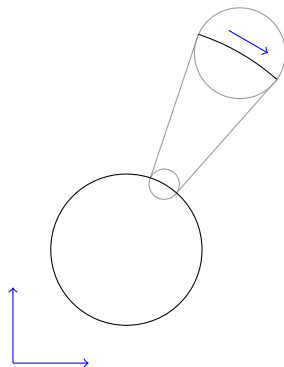
- ▶ Lineare Koordinaten: Lineare Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Hauptkomponentenanalyse

Neulich

- ▶ Nichtlineare Methoden
- ▶ MDS, Kernel-Methoden, lokal-lineare Methoden

Problemfälle

Manche Formen brauchen zu viele Koordinaten.



1-dimensionaler Form.
2 Koordinaten benötigt für eine
volle Beschreibung.
Kreis ist zu groß für \mathbb{R} .

Eine Lösung

Wie können wir dies lösen?

Zyklische Koordinaten

- ▶ Benutze $S^1 = [0, 1]/(0 \sim 1)$ als Koordinatenraum
- ▶ Löst den Kreis
- ▶ Löst den Torus
- ▶ Kommt anderweitig vor:
 - ▶ Phasenkoordinaten für Wellen
 - ▶ Winkelkoordinaten für Richtungen
 - ▶ Beschreibungen von sich wiederholenden Prozesse

Zyklische Koordinaten und Kohomologie

Noch zu lösen: wie finden wir zyklische Koordinaten?

Es genügt, Abbildungen $X \rightarrow S^1$ zu finden. Stetigkeit, Glattheit erwünscht.

Fakt aus der Topologie: S^1 ist der Eilenberg-MacLane Raum $K(\mathbb{Z}; 1)$; dies verknüpft Homotopie (Abbildungen unter stetigen Umformungen) mit Kohomologie.

$$H^1(X; \mathbb{Z}) = [X, S^1]$$

Kohomologie lässt sich mit einer Variante des Algorithmus für Betti-Barcodes berechnen.

Von Kohomologie zu zyklischen Koordinaten

Erinnerung

- ▶ Kohomologie mit Koeffizienten in \mathbb{F}_p für (kleine) Primzahlen p : leicht zu berechnen.
Kohomologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z} : Basis für zyklische Koordinaten.
Umwandlung ordnet jedem Datenpunkt 0 zu und bildet jede Kante stetig auf den vollen gesamten Kreis ab. Erwünscht: glattere Abbildung an den Ecken.
- ▶ Numerische Stabilität der Kohomologieberechnung und der Glättung.

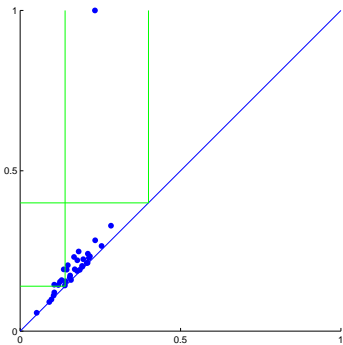
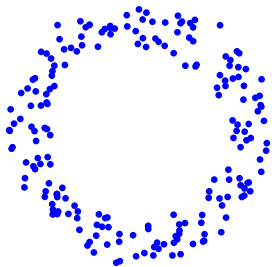
Glättung

- ▶ \mathbb{Z} 1-Kozykel: gewichteter Graph mit Kantenwichtung aus \mathbb{Z} .
- ▶ Koordinaten durch Durchlaufen der Kanten. Das Kantengewicht schreibt die Differenz der Gewichte auf den Ecken vor.
- ▶ Kohomologe Kozykeln ergeben gleiche Werte, modulo 1.0, auf jeder Ecke: gewährleistet durch die Kozykelbedingung.
- ▶ Umwandlung mit \mathbb{Z} -Kozykeln gibt jeder Ecke den Wert 0.
- ▶ Glättung weist jedem Kozykel ζ einen Kohomologen Kozykel z mit kleiner Kantenwichtung zu.
- ▶ Wir wollen somit ein x finden, das $\|\zeta + \delta x\|_2$ minimiert.
- ▶ Wohlbekanntes Optimierungsproblem. Wir benutzen den LSQR-Algorithmus.

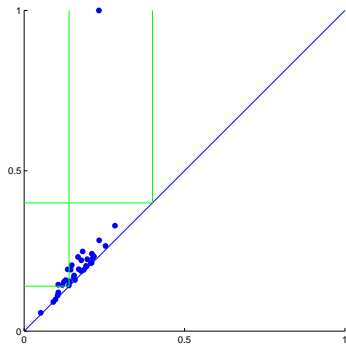
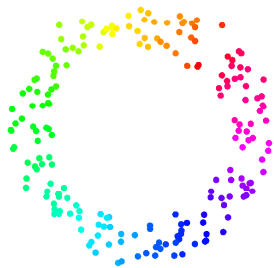
Referenz

Morozov, de Silva, Vejdemo-Johansson: *Persistent Cohomology and Circular coordinates*, Proceedings of SoCG 2009; to appear: Discrete and Computational Geometry.

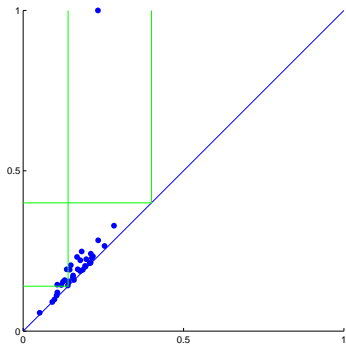
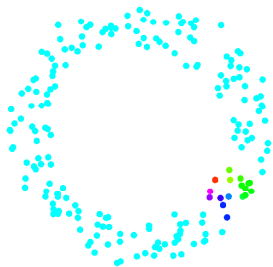
Beispiele



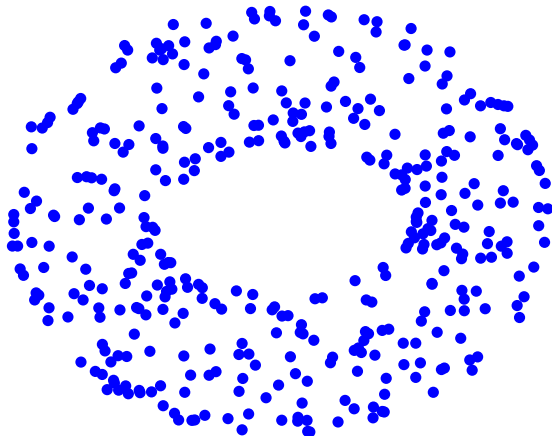
Beispiele



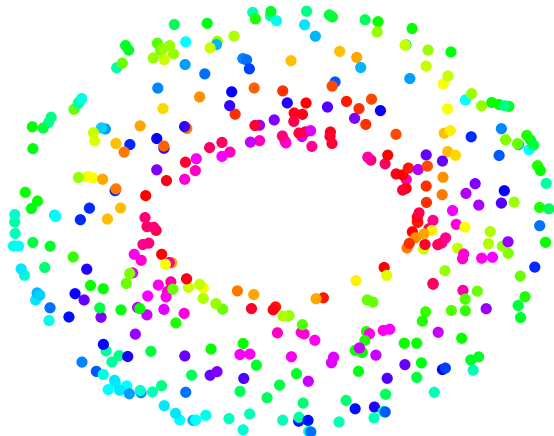
Beispiele



Beispiele



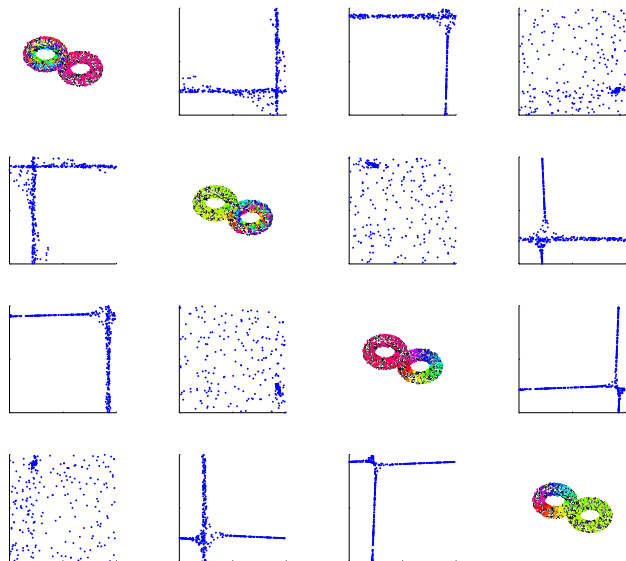
Beispiele



Beispiele



Beispiele



Wiederkehrende Signale sind Kreise

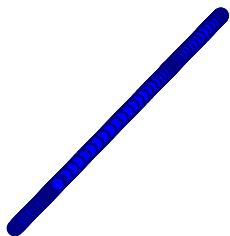
Ausreichend wohlbeschriebene periodische oder wiederkehrende stetige Signale beschreiben Zyklen in deren Beobachtungsräumen.

Beispiel

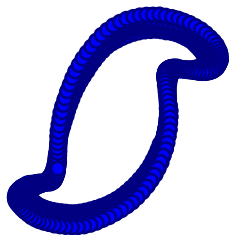
Betrachten wir einen Klarinettenton – numerisch eine Abtastreihe a_t von der Mikrofon-Membranauslenkung mit 44 100 Hz und Werten in $[-32\,767, 32\,767]$.

Wir betten die 1-dimensionalen Daten in \mathbb{R}^2 durch eine Delay-Einbettung $f_\epsilon : t \mapsto (a_t, a_{t+\epsilon})$ ein.

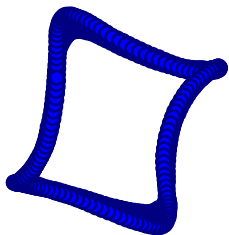
Klarinette in \mathbb{R}^2



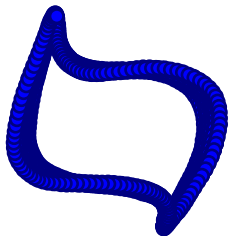
Klarinette in \mathbb{R}^2



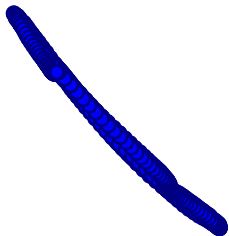
Klarinette in \mathbb{R}^2



Klarinette in \mathbb{R}^2



Klarinette in \mathbb{R}^2

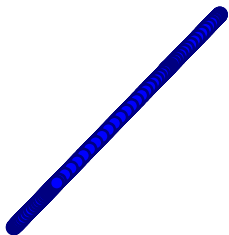


Koordinatisierung eines periodischen System

Die Zyklen, die von einem periodischen System beschrieben werden, können wir durch Kohomologie koordinatisieren

Die Qualität der Koordinaten wird durch die Länge des dominanten Persistenzintervalles gemessen.

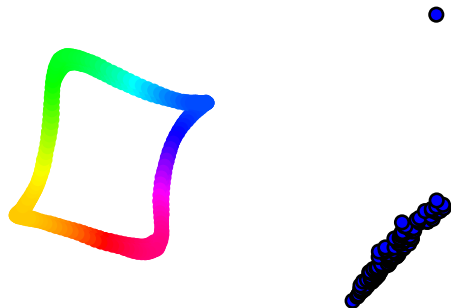
Koordinatisierte Delay-Einbettungen



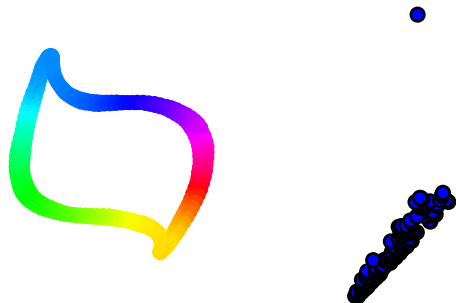
Koordinatisierte Delay-Einbettungen



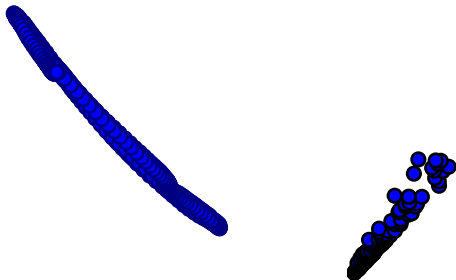
Koordinatisierte Delay-Einbettungen



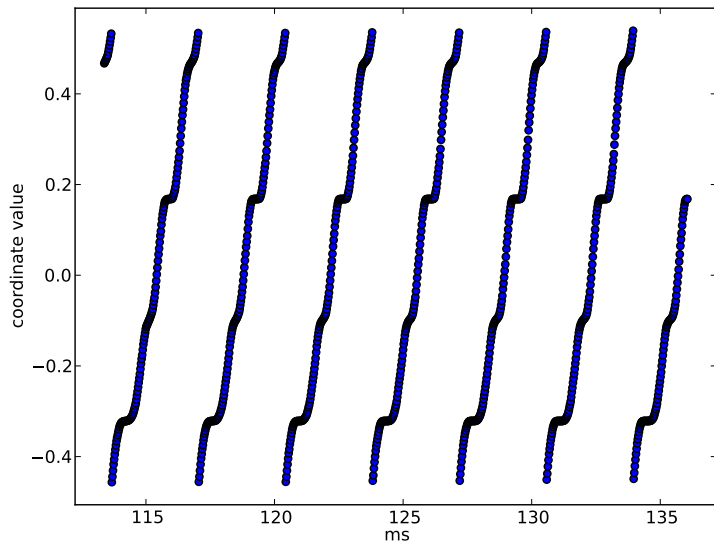
Koordinatisierte Delay-Einbettungen



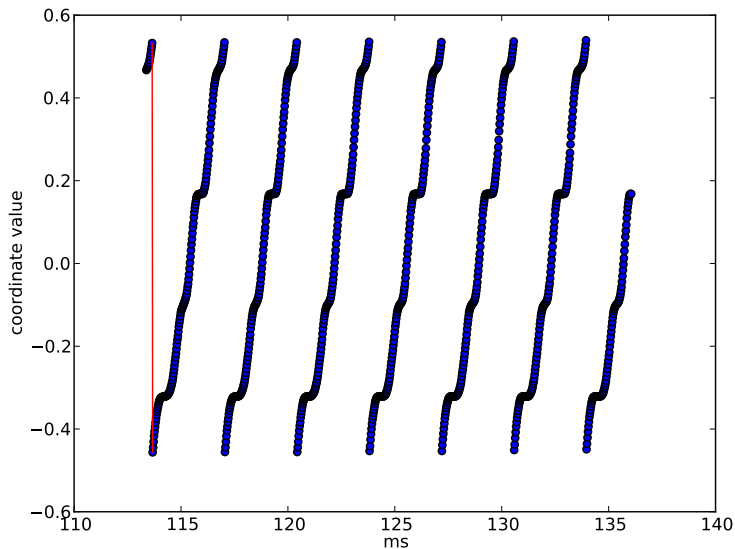
Koordinatisierte Delay-Einbettungen



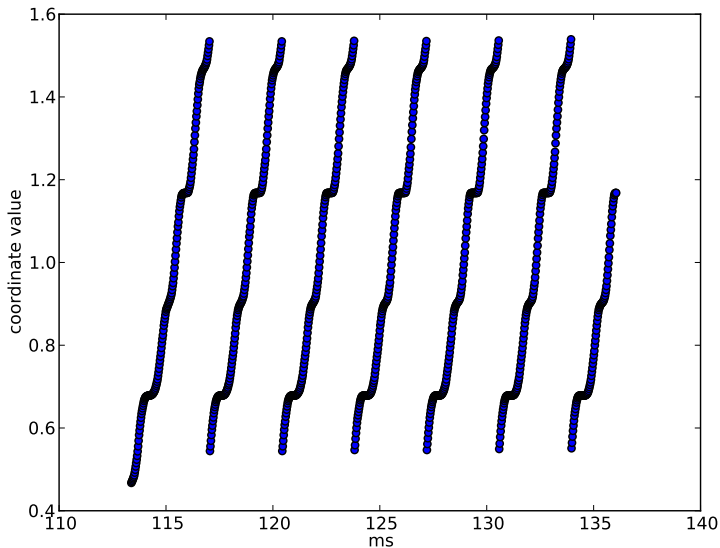
Aufrollen der Koordinaten



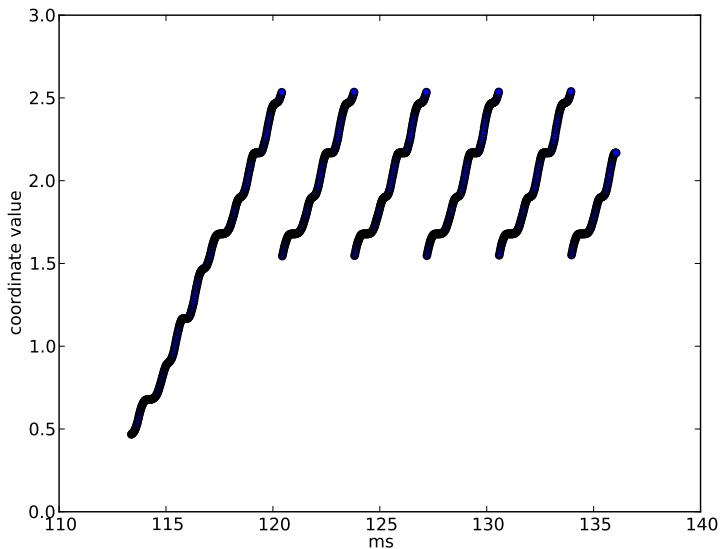
Aufrollen der Koordinaten



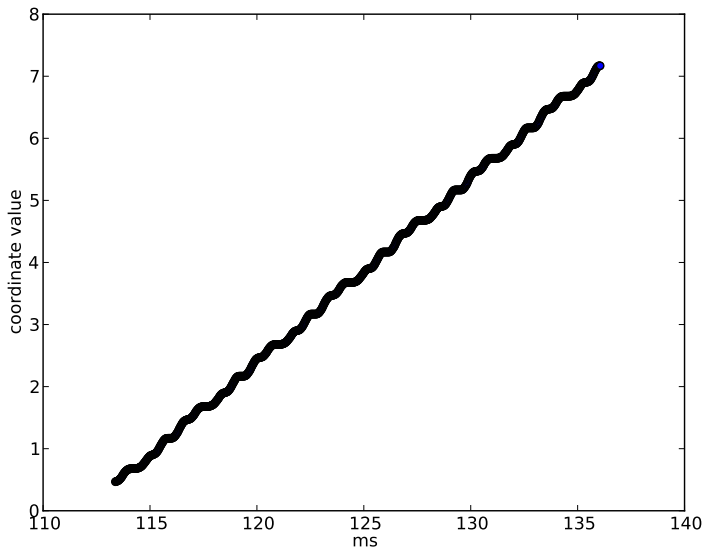
Aufrollen der Koordinaten



Aufrollen der Koordinaten



Aufrollen der Koordinaten



Bestimmung der Periode

- ▶ Lineare Regression der aufgerollten Koordinaten:
 $y = 0.296x - 33.1$
- ▶ Steigung: Anteil der vollen Periode / ms
- ▶ $1000 * \text{Steigung} = 296 \text{ Hz}$

Weitere Datenmengen

Mit diese Methoden arbeiten wir gerade an die Untersuchung von potentiellen Anwendungen:

Klima Durchschnittstemperaturen für 250 Jahre:
Jahreszyklus bildet (rauschigen) Kreis.

Klima Gezeitenhöhen: wir suchen erstmal einen Torus
aufgespannt von den Halbmonats- und Jahres-zykeln.

Dynamik Neuen Modell für den Lorenzattraktor – die zwei
Zykeln vom Attraktor ergeben zwei Zykeln in
Kohomologie, zwischen denen der Attraktor hin und
her wechselt.

Anatomie 34 Ortungspunkte auf einen laufenden Person wurden
geortet. Daten sind in 102-dimensionalen Raum, und
beschreiben einer Zykel.

Wir suchen noch einen *Killer Application*.